Title	正常金属における超音波の吸収
Author(s)	一柳, 正和
Citation	物性研究 (1965), 4(4): 327-335
Issue Date	1965-07-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/85748
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

正常金属における超音波の吸収

一　柳　正　和（阪大工）

（６月２８日受理）

§１　序　　論

金属における超音波吸収の問題はすでに多くの人々により論じられている。Pippard[1]は電子の速度分布に対する仮定のもとにこの問題を論じた。Holstein[2]は通常の摂動論を使つて、この仮定はcollision dragの効果の直接の結果であり、本質的に二段階の過程にもとずくものであることを示した。Cohen[3]らはPippardの仮定のもとに、磁場中での吸収を論じた。Blount[4]はdeformation transformationを導入してこの問題を論じた。Tsuneto[5]はGreen関数の方法を用いBlountと同じ立場から吸収係数を計算し、Pippardと同じ結果を得た。

Nagaoka[6]はKuboの線型応答の理論を用いて音波の吸収を論じたが、Pippardの結果を得ることができなかつた。彼はcollision dragの効果を音波が不純物をゆさぶる効果とみなし、不純物運動の減衰の効果の存在を指摘した。しかしながら、彼のこの効果の計算は $q\ell \gg 1$（q：音波の波数ベクトル ℓ：電子の平均自由行程）の場合に相当しており、$q\ell \ll 1$ のときどうなるか問題である。さらに、彼の理論には§３で述べるladderの補正が入つていない。Osaka[7]はNagaokaと同じHamiltonianから出発し、Green関数の方法を音波の吸収に応用し、Pippardと同じ結果を得たが、彼の理論には上述の効果は考慮されていない。

ここでは、Green関数の方法により、音波をphononとみなした上で上述の効果をとり入れ、音波の吸収を論ずる。音波をphononとみなすに当り、$q\ell \ll 1$ のときにもphononが意味のあるものかどうかが問題であるが、§５に示すようにこの極限では

$$\omega\tau_p \cdot \omega\tau \simeq 1 \qquad (1\cdot1)$$

が成り立ち、$\omega<1$ であればphonon が意味ある像となり得る。ただし τ_p は phonon の寿命、τ は電子の寿命であり、ω は音波の周波数である。ここでは $\omega\tau<1$ の場合を考え、$q\ell$ の値にかかわらず音波をphonon とみなす。

§2 Hamiltonian

簡単のため単位体積当りn個の原子よりなる一価金属を考える。系は電子、phonon、それに不規則に分布している不純物（濃度n_i）より成る。

系の全Hamiltonian $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_I \tag{2.1}$$

ただし

$$\mathcal{H}_0=\Sigma_K E(K)\, a_K^+ a_K+\frac{1}{2}\Sigma_q \Omega_q b_q^+ b_q+\Sigma_\mu \Sigma_k V_{imp}(K)\, e^{-iKR_\mu}\rho_K^+ \tag{2.2}$$

$$\mathcal{H}_I=\frac{1}{2}\Sigma_K \phi(K)\, \rho_K^+\rho_K+\Sigma_k v_k^i \rho_k^+ Q_k+\frac{i}{n}\Sigma k_z^2 V_{imp}(K)\, e^{-iKR_\mu} Q_q \tag{2.3}$$

ここで、$E(k)=k^2/2m$ は電子のエネルギー、$\phi(k)=4\pi e^2/k^2$ は Coulomb 相互作用の行列要素、v_k^i は電子−phonon 相互作用のそれであり、R_μ は不純物の位置を示す。さらに

$$\rho_K^+=\Sigma_p a_{p+k}^+ a_p$$

は電子密度揺動の演算子であり、

$$Q_q=(2\Omega_q)^{-\frac{1}{2}}(b_q+b_q^+) \tag{2.5}$$

は phonon の振巾である。$\mathcal{H}_0$ の意味は明らかである。

$\mathcal{H}_I$ の才1及び才2項は各々電子－電子及び電子－phonon 相互作用である。才3項は不純物が音波によりゆさぶられる効果を表わすHamiltonianである。この項は§4で論ずる collision drag の効果に関係しており、$\omega\tau\ll1$ のとき意味のある項である。(§4)

次に、Luttinger[8] らに従つて、電子及び phonon の伝播関係を定義する:

$$g_p(\lambda) = \langle T\{a_p^+(\lambda)\, a_p\}\rangle_{aV} \quad (-\beta<\lambda<\beta) \text{ (電子に対して)} \qquad (2.6a)$$

$$D_q(\lambda) = \langle T\{Q_q^+(\lambda)\, Q_q\}\rangle_{aV} \qquad \text{(phonon に対して)} \qquad (2.7a)$$

または、Fourier 変換して

$$g_p(J_e) = \int_0^\beta d\lambda\, e^{-J_e\lambda} g_p(\lambda)\ ; \quad J_e = \frac{\pi i}{\beta}(2\ell+1)+\mu \qquad (2.6b)$$

$$D_q(\alpha_m) = \int_0^\beta d\lambda\, e^{-\alpha_m\lambda} D_q(\lambda)\ ; \quad \alpha_m = \frac{\pi i}{\beta}\cdot 2m \qquad (2.7b)$$

ここに、ℓ, m は任意の整数、$\langle\cdots\rangle_{aN}$ は grand canonical 集団及び不純物分布についての平均を意味する。

§ 3 Phonon の分散式

計算の便宜上、静的不純物の存在する場合から考察する。この場合には、$\mathcal{H}_I$ の才3項は除外される。

有効 phonon 伝播関数 $D^{(i)}$ は Fig. 1の Dyson方程式より求められる。Fig. 1 において、記号 Γ は不純物の影響を示す。すなわち記号 Γ は Fig. 3 の他に Fig. 5 に示す ladder の補正も含む。$D^{(i)}(q,\alpha_m)$ は次のようになる:

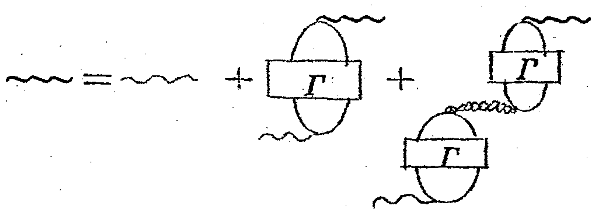

Fig. 1 有効フォノン伝播関数

$$D^{(i)}(q,\alpha_m) = \\ = [\alpha_m^2 - \Omega_q^2 - |v_q^i|^2 Q^{(i)}(q,\alpha_m)\cdot\epsilon^{-1}(q,\alpha_m)]^{-1} \qquad (3.1)$$

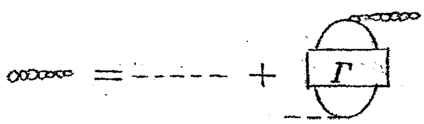

Fig. 2 遮蔽されたクーロン相互作用

ただし

$$\epsilon(q,\alpha_m) = 1 - \phi(q)\, Q^{(i)}(q,\alpha_m) \qquad (3.2)$$

$$Q^{(i)}(q,\alpha_m) = \Sigma_p \frac{1}{\beta} \Sigma_l \langle g_{p+q}(J_e+\alpha_m)\cdot g_p(J_e)\rangle_{aV} \qquad (3.3)$$

関数 $Q^{(i)}$ は Fig.7 により近似的にもとめられる。すなわち

$$\langle \mathcal{G}_{p+q}(\mathcal{J}_e+\alpha_m)\cdot\mathcal{G}_p(\mathcal{J}_e)\rangle_{av}=\frac{\mathcal{G}^{(i)}_{p+q}(\mathcal{J}_e+\alpha_m)\cdot\mathcal{G}^{(i)}_{p}(\mathcal{J}_e)}{1-n_i\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}|\overline{V}_{imp}(p-p')|^2\,\mathcal{G}^{(i)}_{p'+q}(\mathcal{J}_e+\alpha_m)\cdot\mathcal{G}^{(i)}_{p'}(\mathcal{J}_e)} \tag{3.4}$$

ただし、$\mathcal{G}^{(i)}$ は有効電子伝播関数で Fig.3 により近似的に次のようになる

$$\mathcal{G}^{(i)}_p(\mathcal{J}_e)=[\mathcal{J}_e-E(p)+\eta(\mathcal{J}_e)\cdot i/2\tau]^{-1} \tag{3.5}$$

$$\eta(z)=+1 \quad I_m z<0 \text{ のとき}$$
$$=-1 \quad I_m z>0 \text{ のとき}$$

$$\frac{1}{\tau}=n_i\frac{mP_0}{(2\pi)^2}\int|\overline{V}_{imp}(\theta)|^2\,d\theta \tag{3.6}$$

τ は電子の不純物散乱による寿命であり、V_{imp} は遮蔽された不純物 potential である。

$D^{(i)}(q,\omega)$ は $D^{(i)}(q,\alpha_m)$ の解析接続で定義される：

$$D^{(i)}(q,\omega)=[\omega^2-\Omega_q^2-|v_q^i|^2Q^{(i)}(q,\omega)\cdot\epsilon^{-1}(q,\omega)]^{-1} \tag{3.7}$$

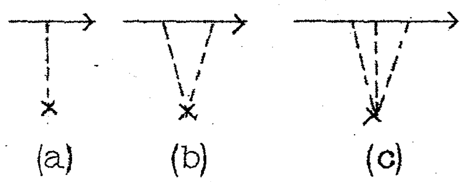

Fig.3 不純物散乱

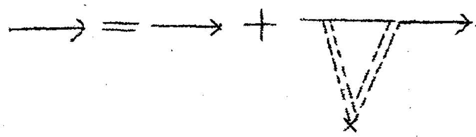

Fig.4 有効電子伝播関数
（二重線は遮蔽の意味）

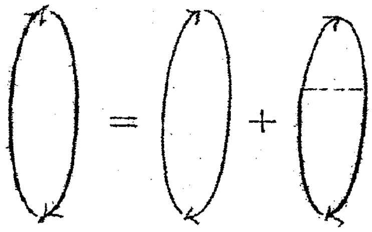

Fig.5 ladder の補正

したがつて phonon の分散式は

$$\omega^2=\Omega_p^2\cdot\epsilon^{-1}(q,\omega) \tag{3.8}$$

となる。ここで ion に対しては "jellium 模型" を用いた。$\Omega_p=\sqrt{\frac{4\pi ne^2}{M}}$ はイオンプラズマ振動数である。

(3.8) より phonon の減衰因子 γ_q は $\omega\sim\omega_{ph}$ の近くで

$$\gamma_q=\frac{\Omega_p^2}{2\omega}\frac{I_m\epsilon(q,\omega)}{[Re\epsilon(q,\omega)]^2}=\frac{\omega_{ph}^2}{2\omega}\frac{I_mQ^{(i)}}{ReQ^{(i)}} \tag{3.9}$$

となる。ただし、ω_{ph}はくりこまれたphononの振動数であり、$Q^{(i)}(q,\omega)$は$Q^{(i)}(q,\alpha_m)$の解析接続である：

$$Q^{(i)}(q,\omega)=-N(0)\left[1+\frac{i\omega}{2qv_0}T(q,\omega)\right] \tag{3.10}$$

$$T(q,\omega)=S(q,\omega)\left[1-\frac{1}{2q\ell}\cdot S(q,\omega)\right]^{-1} \tag{3.11}$$

$$S(q,\omega)=-i\,ln\left(\frac{\omega-qv_0+i/\tau}{\omega+qv_0+i/\tau}\right) \tag{3.12}$$

N(0)はFermi準位での状態の密度である。

結局、音波の吸収係数は

$$\alpha^{(i)}=\frac{q\cdot\gamma q}{2\omega}=\frac{nm}{Dv_S\tau}\,\frac{1/3\cdot(q\ell)^2\cdot\tan^{-1}q\ell}{q\ell-\tan^{-1}q\ell} \tag{3.13}$$

となる。(3.10)において、$S(q,\omega)$でなく$T(q,\omega)$が現われるのは、Fig.5のladderの補正による。この補正はNagaoka[6]の論文ではとり入れられていない。しかしながら、この節の計算は$\omega\tau\simeq1$，すなわち$q\ell\gg1$の場合にのみ正しいことが、次の節で示される。

§4 Collision dragの効果

よく知られているように、$\tau\to\infty$での電子による音波の吸収は、電子とphononとの間の"surf-riding" resonance[9]による。したがつて、τ＝有限で、$\omega\tau<1$なるときのこの共鳴がどのように変るかは興味あることである。

そのために、まずFig.6aを考える。$\omega\tau\ll1$のときには、中間状態の電子は短命(ω^{-1}に比して)であり、この状態でのエネルギーは保存されなくてもよい。同様のことが(b)についてもいえる。結局この二つの過程は、(c)に帰着せしめられる。これがcollision dragのvertexであり、$\mathcal{H}_I$の才3項で表わされることはHolstein[2]の

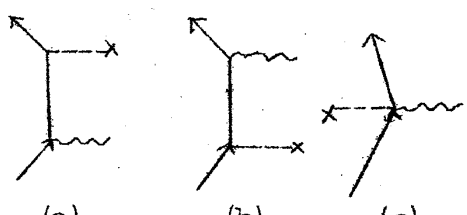

Fig.6 Collisionの相互作用

方法の直接の応用で示される。すなわちcollision dragは本質的に二段階の過程である。

collision dragの効果を考えるとき、有効phonon伝播関数$D(q,\alpha_m)$は次のようになる(Fig.7を参照):

$$D(q,\alpha_m)=[\alpha_m^2-\Omega_q^2-|v_q^i|^2Q^{(i)}(q,\alpha_m)\cdot\epsilon^{-1}(q,\alpha_m)-\frac{v_q^{i*}}{\sqrt{nM}}\frac{F(q,\alpha_m)}{\epsilon(q,\alpha_m)}$$
$$-n_i\Sigma k_z^2|V_{imp}(k)|^2Q^{(i)}(k,\omega)\epsilon^{-1}(k,\alpha_m)]^{-1} \tag{4・1}$$

ここで、才4項以下は、不純物が音波によりゆさぶられることの効果に対応する。

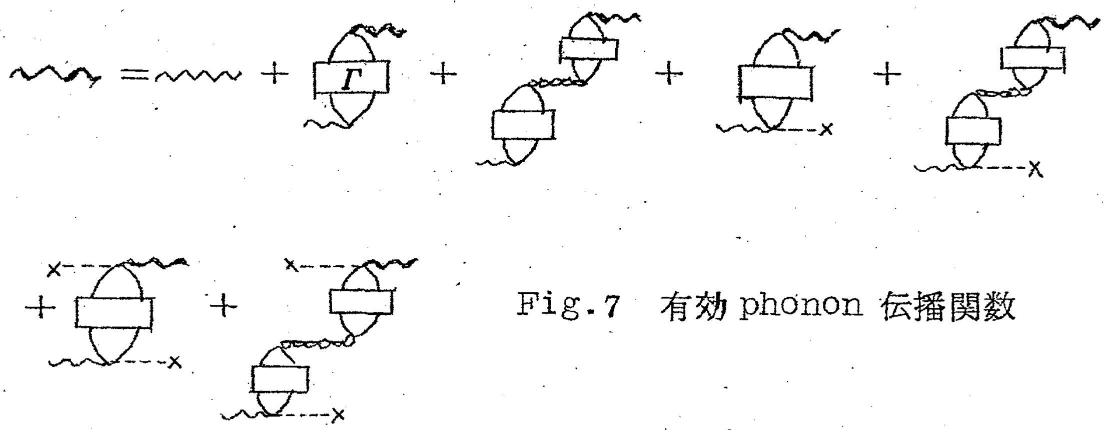

Fig.7　有効phonon伝播関数

(4・1)より、$D(q,\omega)$は

$$D(q,\omega)=[\omega^2-\frac{\Omega_p^2}{\epsilon(q,\omega)}-\frac{v_q^{i*}}{\sqrt{nM}}F(q,\omega)-n_i\Sigma k_z^2|V_{imp}(k)|^2$$
$$\times\frac{Q^{(i)}(k,\omega)}{\epsilon(k,\omega)} \tag{4・2}$$

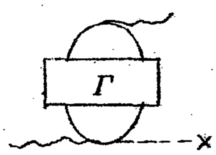

Fig.　関数F

となる。ただし、$F(q,\omega)$はFig.8で表わされる関数で、近似的に次のようになる。

$$\frac{1}{n\cdot q}F(q,\omega)\cong\frac{i\omega}{qv_0}\cdot\frac{3}{q\ell} \tag{4・3}$$

この関数が、Collision dragの効果に関係する。(4・2)の最後の項は

Nagaoka の指摘した不純物運動の減衰の効果である。しかしながら、Nagaokaの計算は $q\ell \gg 1$ の場合に相当し、$q\ell \ll 1$ の場合どうなるかは問題として残される。

(4.2) の最後の項の吸収係数への寄与 ($\equiv \alpha_3$) は

$$\alpha_3 \propto \mathrm{Im}\,\Sigma_k k_z^2 |\bar{V}_{imp}(k)|^2\, \mathrm{Im}\, Q^{(i)}(k,\omega) \tag{4.4}$$

である。今、この式に $Q^{(i)}$ として (3.10)を代入する。この場合、(3.10)は $q \ll P_0$ のときのみ成り立つ関数であるが、この関数形は $k \sim 2P$ まで成り立つものと仮定する。すなわち、関数

$$\mathrm{Im}\, Q^{(i)}(k,\omega) \cong -N(0) \cdot \frac{\omega}{kv_0} \cdot \frac{3}{k\ell} \tag{4.5}$$

をkの値のいかんにかかわらず用いることにする。簡単な計算の後、我々は

$$\alpha_3 \cong \frac{4}{\pi} \frac{nm}{Dv_S\tau} \cdot \frac{1}{P_0\ell} \tag{4.6}$$

を得る。すなわち、この効果の寄与は他の寄与に比して $D(1/p_0\ell)$ であることがわかる。

(4.2)の才3項まではOsaka[7]により詳しく解析されているので、ここではその結果を示すにとどめる。すなわち、collision drag の効果をとり入れたときの吸収係数 α は、

$$\alpha = \frac{nm}{Dv_S\tau} \left[\frac{\frac{1}{3}(q\ell)^2 \tan^{-1} q\ell}{q\ell - \tan^{-1} q\ell} - 1 \right] \tag{4.7}$$

となる。この結果は、Pippard の結果に対応するが、次の点が異なる。Pippard の結果においては、音波の吸収を特徴づける時間は電子の伝導現象を特徴づける緩和時間であるとされているが、(4.7)のそれは電子の寿命である。しかしながら、これらの現象の間には、電子の輸送の性質上に本質的なちがいがある。すなわち、電子の伝導現象においては、電子の運動量の余弦成分が本質的役割をしているが、音波の吸収においては $\omega = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_0$ を満足する電子のみが本質的役割をしている。したがつて、音波の吸収機構を特徴づける時間は、

電子の緩和時間でなく、寿命であるように思われる。

§5　討論と結論

§4 でのべたように、collision drag の効果は本質的に二段階の過程であり、$\omega\tau \ll 1$ のとき、中間状態の電子が短命であるがために現れる効果である。したがつて、§3 の結果は $\omega\tau \sim 1$ もしくは $q\ell \gg 1$ のときにのみ正しい。このことから、音波の吸収係数は

$$\alpha \cong \frac{\pi}{6}\frac{nmv_0}{Dv_S^2}\omega \qquad \omega\tau \sim 1 \text{ のとき} \tag{5.1}$$

$$\cong \frac{4}{15}\frac{nmv_0^2}{Dv_S^3}\omega^2\tau \qquad \omega\tau \ll 1 \text{ のとき} \tag{5.2}$$

となる。

一方、phonon の平均自由行程 Λ_p は、α により

$$\Lambda_p \equiv v_S\tau_p = \alpha^{-1} \tag{5.3}$$

と定義される。τ_p は phonon の電子との相互作用による寿命である。したがつて (5.1) より、我々は

$$\frac{1}{\tau_p} \cong \frac{nm\,v_0}{D\,v_S}\cdot\omega \qquad \omega\tau \sim 1 \tag{5.4}$$

を得る。この結果はよく知られた結果であり、$\omega\tau \sim 1$ である限り、phonon の寿命は、電子のそれに殆んど影響されない。一方、(5.2) からは

$$\omega\tau_p\cdot\omega\tau \sim 1 \qquad \omega\tau \ll 1 \tag{5.5}$$

が導かれる。すなわち、phonon 寿命は、電子のそれの逆数に比例する。またこの式は $\omega\tau \ll 1$ である限り phonon 像が意味があるものであることがわかる。これが、我々が音波を phonon とみなした根きよである。

我々は、金属における音波の吸収を音波を phonon とみなして論じた。特に不純物運動の減衰の効果を ladder の補正を行なつた上で論じ、音波の吸収係数への寄与は $O(1/p_0\ell)$ で無視出来ることを知つた。この効果を無視したとき

音波の吸収機構を特徴づける時間の違いをのぞいて、Pippard の式に対応するものが得られる。

最後に、ここではladderの補正に関するその物理的意味にはふれなかつたが、この補正はFermi energy の局所性と関係していることが暗示されるがこの点、さらに論じられるべきである。

謝　　辞

この研究にあたつて、終始御指導下さつた西山先生に感謝します。

文　　献

1) A.B.Pippard, Phil. Mag. 46 ('55) 1104
2) T.Holstein, Phys. Rev. 113 ('59) 479
3) M.H.Cohen et al., Phys. Rev. 117 ('60) 937
4) E.I.Blount, Phys. Rev. 114 ('59) 418
5) T.Tsuneto, Phys. Rev. 121 ('61) 402
6) Y.Nagaoka, Prog. Theor. Phys. 26 ('61) 589
7) Y.Osaka, J. Phys. Soc. (Japan) 18 ('63) 877
8) J.Luttinger et al., Phys. Rev. 121 ('61) 942
9) J.M.Ziman, Electrons and Phonons (Oxford)